

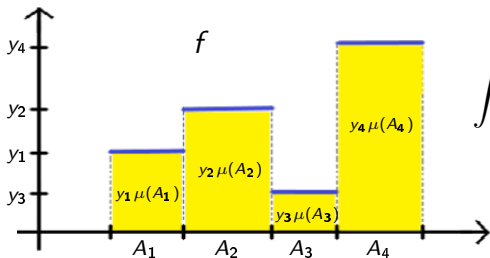
Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 9

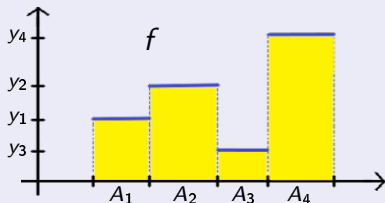
Całka z funkcji nieujemnej



$$\int_X f d\mu = y_1\mu(A_1) + y_2\mu(A_2) + y_3\mu(A_3) + y_4\mu(A_4)$$

Niech (X, \mathcal{F}, μ) przestrzeń z miarą.

Def. Jeżeli $f(x) = \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$ jest nieujemną funkcją prostą, gdzie $\{y_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}^+$ oraz $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{F}$ parami rozłączne, to wartość



$$\int_X f d\mu := \sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i)$$

nazywamy **całką** z funkcji f względem miary μ .

Mówimy, że f jest **całkowalna** jeżeli $\int_X f d\mu < \infty$ (konwencja $0 \cdot \infty = 0$)

Lem. Powyższa definicja jest poprawna (nie zależy od przedstawienia f).

Dowód: $\sum_{i=1}^n y_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^m z_j \mathbb{1}_{B_j} \implies \sum_{i=1}^n y_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^m z_j \mu(B_j)$



Prz. $\int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$, dla $A \in \mathcal{F}$ ($\mathbb{1}_A$ całkowalna $\iff \mu(A) < \infty$)

Np. $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} d\lambda = \lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$, czyli $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ jest λ -całkowalna. 2/9

Stw. Dla $f, g \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ nieujemnych oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ mamy

① $\int_X \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu$ („dodatnia liniowość”)

② $f \leq g \implies \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$ (monotoniczność)

Dowód: (1). Niech $f = \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{1}_{A_i}$ oraz $g = \sum_{j=1}^m z_j \mathbb{1}_{B_j}$, gdzie $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{F}$ oraz $\{B_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathcal{F}$ rozbiaja przestrzeni X . Wtedy

$$\alpha f + \beta g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha y_i + \beta z_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

oraz $\sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) \stackrel{\text{add}}{=} \mu(\bigsqcup_{j=1}^m A_i \cap B_j) = \mu(A_i \cap \bigsqcup_{j=1}^m B_j) = \mu(A_i)$
i podobnie $\sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) = \mu(B_j)$. Stąd

$$\begin{aligned} \int_X \alpha f + \beta g \, d\mu &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha y_i + \beta z_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha y_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \beta z_j \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) \\ &\stackrel{\text{add}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha y_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \beta z_j \mu(B_j) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu \end{aligned}$$

(2). Jeśli $f \leq g$, to $g = f + (g - f)$ jest sumą funkcji prostych nieujemnych i stąd $\int_X g d\mu \stackrel{(1)}{=} \int_X f d\mu + \int_X g - f d\mu \geq \int_X f d\mu$. ■

Uw. Jeżeli $f \geq 0$ nieujemna funkcja mierzalna, to $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, gdzie $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ nieujemne funkcje proste takie, że $f_n \nearrow f$ (**Wykład 8**)

Def. Całkę z funkcji mierzalnej nieujemnej $f \geq 0$ definiujemy jako

$$\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X h d\mu : 0 \leq h \leq f, h \in \mathcal{E}(\mathcal{F}) \right\}.$$

Powiemy, że f jest całkowna, jeżeli $\int_X f d\mu < \infty$.

Uw. Powyższa definicja jest zgodna z poprzednią.



Lem. $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{F}), 0 \leq f \leq g \implies \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Dowód: $\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X h d\mu : 0 \leq h \leq f, h \in \mathcal{E}(\mathcal{F}) \right\}$
 $\leq \sup \left\{ \int_X h d\mu : 0 \leq h \leq g, h \in \mathcal{E}(\mathcal{F}) \right\} = \int_X g d\mu$ ■

Tw. (Leviego) o zbieżności monotonicznej



Beppo Levi

$$\left(\begin{array}{l} \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ mierzalne} \\ \text{nieujemne oraz } f_n \nearrow f \end{array} \right) \implies \int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

Dowód: $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots \xrightarrow{\text{Lem}} \int_X f_1 d\mu \leq \int_X f_2 d\mu \leq \dots$. Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu$ istnieje. Skoro $f_n \leq f$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$. Stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

Aby wykazać nierówność przeciwną weźmy $h \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$, gdzie $0 \leq h \leq f$. Potrzebujemy pokazać, że

$$\int_X h d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

W tym celu ustalmy $\alpha \in (0, 1)$ i zauważmy, że skoro $f_n \nearrow f$, to

$$\forall x \in X \exists n \in \mathbb{N} \quad \alpha f(x) \leq f_n(x).$$

Zatem zbiory $B_n := \{x \in X : \alpha f(x) \leq f_n(x)\} \in \mathcal{F}$ pokrywają całą przestrzeń X oraz $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots$. Czyli $B_n \nearrow X$. Ponadto

$\alpha h \mathbb{1}_{B_n} \stackrel{h \leq f}{\leq} \alpha f \mathbb{1}_{B_n} \stackrel{\text{def } B_n}{\leq} f_n \mathbb{1}_{B_n} \leq f_n$. Stąd dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\int_X \alpha h \mathbb{1}_{B_n} d\mu \leq \int_X f_n d\mu. \quad (*)$$

Niech $h = \sum_{i=1}^N y_i \mathbb{1}_{A_i}$, gdzie $\{A_i\}_{i=1}^N \subseteq \mathcal{F}$. Na mocy ciągłości miary

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_i \cap B_n) \stackrel{B_n \nearrow X}{=} \mu(A_i \cap X) = \mu(A_i), \quad \text{dla } i = 1, \dots, N.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int_X \alpha h \mathbb{1}_{B_n} d\mu &= \alpha \int_X \sum_{i=1}^N y_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_n} d\mu = \alpha \sum_{i=1}^N y_i \mu(A_i \cap B_n) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \sum_{i=1}^N y_i \mu(A_i) = \alpha \int_X h d\mu. \end{aligned}$$

Czyli

$$\alpha \int_X h d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \alpha h \mathbb{1}_{B_n} d\mu \stackrel{(*)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Przechodząc z $\alpha \rightarrow 1$ dostajemy $\int_X h d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$. ■

Wn1. Dla $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ nieujemnych oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ mamy

① $\int_X \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$ („dodatnia liniowość”)

② Jeśli $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$, $f_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^\infty f_n < \infty$, to $\sum_{n=1}^\infty f_n \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$

$$\int_X \sum_{n=1}^\infty f_n d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n d\mu. \quad \left(\begin{array}{l} \text{całkowanie szeregu} \\ \text{wyraz po wyrazie} \end{array} \right)$$

Dowód: (1). Niech $\{f_n\}_{n=1}^\infty, \{g_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ funkcje proste takie, że $f_n \nearrow f, g_n \nearrow g$. Wtedy $\mathcal{E}(\mathcal{F}) \ni \alpha f_n + \beta g_n \nearrow \alpha f + \beta g$ i stąd

$$\begin{aligned} \int_X \alpha f + \beta g d\mu &\stackrel{\text{Levi}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \alpha f_n + \beta g_n d\mu \\ &\stackrel{\text{Stw}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha \int_X f_n d\mu + \beta \int_X g_n d\mu \right) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu \\ &\stackrel{\text{Levi}}{=} \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu \end{aligned}$$

(2). Niech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$, $f_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$. Sumy częściowe

$\sum_{n=1}^N f_n$ są mierzalne (bo $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ przestrzeń liniowa) oraz $\sum_{n=1}^N f_n \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$,

skąd $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ (jako granica funkcji mierzalnych). Ponadto

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu \stackrel{\text{Levi}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_X \sum_{n=1}^N f_n d\mu \stackrel{(1)}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int_X f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu \blacksquare$$

Wn2. (Lemat Fatou) Dla $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$, $f_n \geq 0$, mamy

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \quad (\text{półciągłość z dołu})$$



Fatou

Dowód: Przypomnijmy, iż $\inf_{k \geq n} f_k(x) \nearrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Zatem

$$\begin{aligned} \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu &\stackrel{\text{Levi}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \inf_{k \geq n} f_k d\mu \leq \left\{ \begin{array}{l} \inf_{k \geq n} f_k(x) \leq f_n(x) \\ \text{monotoniczność całki} \end{array} \right\} \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu. \end{aligned}$$

Prz1. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ oraz niech

$$f_n(x) := \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [0, n], \\ 0, & x \notin [0, n]. \end{cases}$$

Wtedy f_n zbiega (i to nawet jednostajnie) do zera, ale

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \frac{1}{n} \cdot \lambda([0, n]) = 1 \not\rightarrow 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda$$

Prz2. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ oraz

$$f_n := \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,1]}, & n \text{ parzyste} \\ \mathbb{1}_{(1,3]}, & n \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ nie istnieje dla $x \in [0, 3]$, ale dla $x \in \mathbb{R}$ mamy $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Ponadto

$$\int_{\mathbb{R}} f_{2n} d\lambda = \lambda([0, 1]) = 1 \quad \text{oraz} \quad \int_{\mathbb{R}} f_{2n+1} d\lambda = \lambda((1, 3]) = 2.$$

Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ nie istnieje, ale $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = 1$. Czyli

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = 0 < 1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$